Ecoles de Travaux Publics
E.I.T.P.E. .Math 2
1986 page 153

MINISTERE DE L'URBANISME
DU LOGEMENT ET DES TRANSPORTS

E.I.T.P.E. 1986

(10)

DEUXIEME COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

- OPTION M -

(temps accordé : 4 heures)

Avertissement : Le candidat verifiera à chaque fois que nécessaire la convergence des séries dont il sera amené à étudier la somme. Les résultats des questions non démontrées pourront être admis pour la suite du problème.

-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-

Pour tout nombre réel t, pour toute fonction f à valeurs réelles définie et intégrable sur [0, t] et pout tout entier naturel non nul n, on définit :

$$R_n(f)(t) = \int_0^t f(x)dx - \frac{t}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(\frac{kt}{n})$$

Nota : [0,t] désigne, même si t est négatif, l'ensemble des réels compris entre 0 et t, 0 et t compris.

Partie I

I.1 - Soit t un nombre réel, q un entier naturel, et f une fonction (q+1) fois continûment dérivable sur un intervalle ouvert contenant [0,t]. On note $f^{(i)}$ la dérivée d'ordre i de f avec, par convention, $f^{(0)} = f$. On désigne par $r_q(f)(t)$ le reste de Mac-Laurin à l'ordre q de f au point t, c'est-à-dire :

$$r_q(f)(t) = f(t) - \sum_{i=0}^{q} f^{(i)}(0).\frac{t^i}{i!}$$

a) - Démontrer que :

$$r_q(f)(t) = \int_0^t \frac{(t-x)^q}{q!}.f^{(q+1)}(x)dx$$

On pourra, par exemple, donner une démonstration par récurrence sur q.

b) - Prouver que :

$$|r_q(f)(t)| \leqslant M_{q+1}(f).\frac{|t|^{q+1}}{(q+1)!}$$

où

$$M_{q+1}(f) = \sup_{x\in[0,t]} |f^{(q+1)}(x)|$$

I.2 - Soit t un nombre réel. Montrer que pour toute fonction f continûment dérivable sur un intervalle ouvert contenant [0,t], on a :

$$\left| \int_0^t f(x)dx - t.f(0)\right| \leqslant M_1(f).\frac{t^2}{2}$$

où

$$M_1(f) = \sup_{x\in[0,t]} |f'(x)|$$

I.3 - Soit t un nombre réel. Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contenant [0,t], et f une fonction continûment dérivable sur I. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$|R_n(f)(t)| \leqslant M_1(f).\frac{t^2}{2n}$$

I.4 - Quelle est la signification graphique de $R_n(f)(t)$?

Partie II

Dans toute cette partie, on considère une fonction f développable en série entière sur un intervalle $I =]-\rho, +\rho[$, ρ désignant un réel strictement positif, et vérifiant la condition suivante :

$$\exists\ M(f) \in \mathbb{R}\ ,\ \forall\ q \in \mathbb{N}\ ,\ \sup_{x\in I}|f^{(q)}(x)| \leqslant \frac{M(f)}{\rho^q}$$

Soit t un point de I et n un entier naturel non nul.

II.1 - Démontrer que :

$$R_n(f)(t) = \int_0^t f(x)dx - \sum_{p=0}^{+\infty} S_n(p).\frac{f^{(p)}(0)}{p!}.(\frac{t}{n})^{p+1}$$

où $S_n(p) = \sum_{k=0}^{n-1} k^p$ pour $p \in \mathbb{N}^*$ et $S_n(0) = n$.

Tournez la page S. V. P.

II.2 - Démontrer que :

$$S_n(p) = \frac{n^{p+1}}{p+1} \sum_{i=0}^{p} C_{p+1}^{i} \frac{b_i}{n^i}$$

où les réels b_i sont définis par :

$$\begin{cases} b_0 = 1 \\ \forall q \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{j=0}^{q} C_{q+1}^{j} b_j = 0 \end{cases}$$

Indication : on pourra effectuer une démonstration par récurrence sur n.

II.3 - On pose, pour tout t de I:

$$g(t) = \int_0^t f(x)dx \quad \text{et} \quad \forall\, i \in \mathbb{N} \quad d_i(t) = b_i \cdot \frac{t^i}{i!}\{g^{(i)}(0) - g^{(i)}(t)\}$$

et on conserve les notations du I.1 pour le reste de Mac Laurin.
Démontrer que pour tout entier naturel N:

$$R_n(f)(t) = \sum_{i=1}^{N+1} \frac{d_i(t)}{n^i} + \varepsilon_N - \eta_N$$

avec
$$\begin{cases} \varepsilon_N = \sum_{i=0}^{N+1} \frac{b_i}{n^i} \cdot \frac{t_i}{i!}\, r_{N+1-i}\{g^{(i)}(t)\} \\ \eta_N = \frac{t}{n} \sum_{k=0}^{n-1} r_N(f)\left(\frac{kt}{n}\right) \end{cases}$$

η_N étant le reste à l'ordre N de la série figurant dans $R_N(f)(t)$ en II.1 avec les termes $S_n(p)$ du § II.2.

II.4 - Montrer que l'on peut écrire ε_N sous la forme :

$$\varepsilon_N = \int_0^t \left(\frac{t}{n}\right)^{N+1} \cdot \frac{f^{(N+1)}(x)}{(N+1)!}\, B_{N+1}(n(1-\tfrac{x}{t}))\,.dx$$

où B_{N+1} est le polynôme défini par :

$$B_{N+1}(X) = \sum_{i=0}^{N+1} C_{N+1}^{i} b_i X^{N+1-i}$$

II.5 - On considère la suite de polynômes B_q, $q \in \mathbb{N}$, définis par la formule précédente et par $B_0 = 1$. Pour tout q non nul :

a) - comparer les valeurs de B_{q+1} en 0 et en 1 ;

b) - trouver une relation entre B'_{q+1} et B_q ;

c) - montrer que B_q a au moins une racine α_q dans $]0,1[$.

d) - en appliquant la formule des accroissements finis, démontrer que :

$$\sup_{u \in [0,n]} |B_q(u)| \leqslant n^q.q!$$

II.6 - Démontrer finalement que :

$$R_n(f)(t) = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{d_i(t)}{n^i}$$

II.7 - a) - Montrer que pour tout entier naturel K non nul, $\sum_{i=1}^{K} \frac{d_i(t)}{n^i}$ constitue un développement limité à l'ordre K en $\frac{1}{n}$ de $R_n(f)(t)$.

Indication : cela revient à démontrer que $\left(R_n(f)(t) - \sum_{i=1}^{K} \frac{d_i(t)}{n^i}\right)$ est négligeable devant $\frac{1}{n^K}$ lorsque n tend vers $+\infty$. On pourra, à cet effet, utiliser en le justifiant le fait que la suite des $d_i(t)$, $i \in \mathbb{N}^*$ est bornée.

b) - Expliciter le développement limité à l'ordre 5 en $\frac{1}{n}$ de $R_n(f)(t)$.

Tournez la page S. V. P.

page 154 1986 Ecoles de Travaux Publics E.I.T.P.E. Math 2

Partie III

III.1 - Les résultats de la partie II sont-ils directement applicables aux fonctions suivantes, et, si oui, sur quel intervalle I de $\mathbb{R}$?

a) $f(t) = e^t$

b) $f(t) = \exp(-\frac{1}{t^2})$

c) $f(t) = \frac{1}{1+t}$

d) $f(t) = \cos 2t$

e) $f(t) = e^{|t|}$

III.2 - Appliquer le résultat du II.6 , avec $n = 1$, à la fonction $f : t \to e^t$ et en déduire le développement en série entière de la fonction:

$$t \to \frac{t}{e^t - 1}$$

sur un intervalle de $\mathbb{R}$ que l'on précisera (le calcul du rayon de convergence n'est pas demandé).

III.3 - En déduire que :

$$\forall\, j \in \mathbb{N}^* , \quad b_{2j+1} = 0$$

III.4 - Appliquer le résultat du II.6 , avec $n = 1$, à la fonction $f : t \to \cos 2t$ et en déduire le développement en série entière de la fonction :

$$t \to t.\cot gt$$

sur un intervalle de $\mathbb{R}$ que l'on précisera (le calcul du rayon de convergence n'est pas demandé).

III.5 - En déduire le développement en série entière de la fonction $t \to tgt$ sur un intervalle de $\mathbb{R}$ que l'on précisera (le calcul du rayon de convergence n'est pas demandé).

Indication : on pourra exprimer tgt en fonction de cotgt et cotg2t.

III.6 - Démontrer qu'il existe une suite de polynômes P_j de degré j à coefficients réels strictement positifs, telle que :

$$\forall\, j \in \mathbb{N}^* \ . \ (tgt)^{(2j-1)} = P_j(tg^2 t)$$

III.7 - En déduire que :

$$\forall\, j \in \mathbb{N}^* , \quad (-1)^{j-1} b_{2j} > 0$$

Ecoles de Travaux Publics
E.I.T.P.E. Math 2
1986
page 155